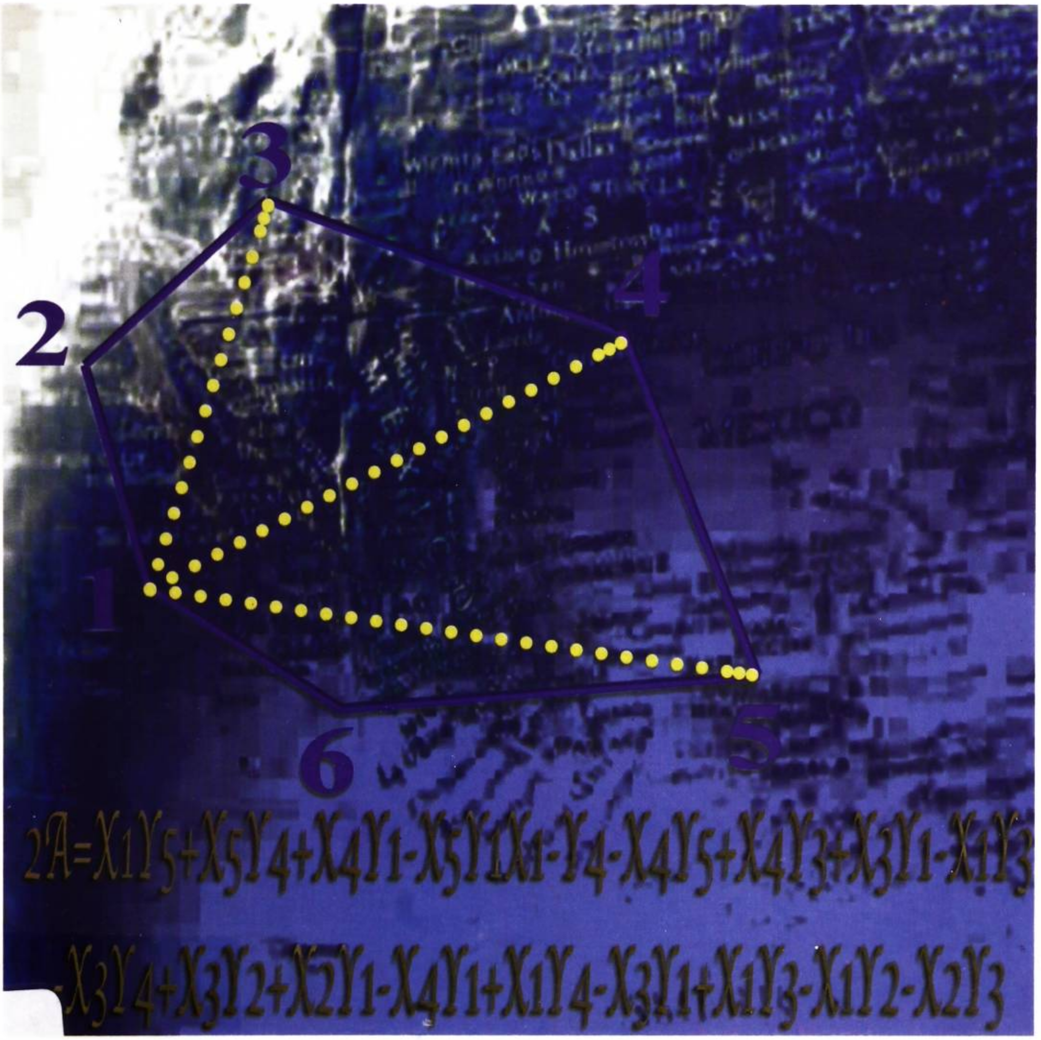
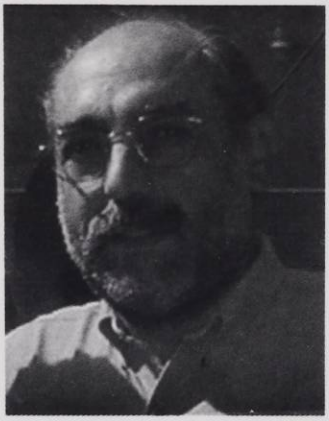
Programa para el cálculo de poligonales PG 1.0

Dante Alfredo Alcántara García y Jesús Cano Licona



UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco



DANTE ALFREDO ALCÁNTARA GARCÍA es ingeniero topógrafo geodesta egresado de la UNAM, donde cursó también la especialidad en construcción y la maestría en administración (organizaciones). A su largo ejercicio profesional ha sumado la docencia en diversas instituciones: la UNAM, la Universidad Anáhuac y, principalmente, en la UAM-Azcapotzalco. También ha impartido cursos de actualización para varias organizaciones, tales como Cefofor, Micare e IMTA.

En la UAM-Azcapotzalco fue integrante del Comité de Estudios de la Licenciatura en Ingeniería Civil, secretario académico de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería y Jefe del Área de Construcción. En dos ocasiones ha asistido como profesor invitado a la Universidad Politécnica de Madrid (UPM).

Actualmente es profesor titular C de tiempo completo en la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco. Fue distinguido con el premio a la docencia 1999.

a la siguiente solapa →

PROGRAMA
PARA EL CÁLCULO DE POLIGONALES PG 1.0

Colección
Libros de Texto y Manuales de Práctica
Serie
Cuadernos Docentes

Programa para el cálculo de poligonales PG 1.0

Dante Alfredo Alcántara García
Jesús Cano Licona

UNIVERSIDAD
AUTONOMA
METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Portada
Pablo Vargas

Composición tipográfica, diseño, producción y cuidado editorial
Sans Serif Editores, tel. 5611 37 30, telfax 5611 37 37
serifed@prodigy.net.mx

Primera edición 2002

ISBN: 970-654-968-4

Impreso en México
Printed in Mexico

Prólogo

Este programa complementa las unidades de enseñanza aprendizaje Topografía y Temas selectos de topografía, que se imparten en la División de Ciencias Básicas e Ingeniería a estudiantes de ingeniería civil e ingeniería ambiental, en el tema correspondiente a Planimetría, ya que permite a los alumnos resolver sus cálculos de poligonales de manera sencilla y rápida, pero no sólo a ellos, sino a cualquier usuario —sean estudiantes de arquitectura, ingenierías agronómica, geológica, topográfica, etc.; profesionales o empresas— que requiera calcular poligonales de cualquier tipo y tamaño, levantadas con cualquier tipo de equipos de medición de distancias y ángulos.

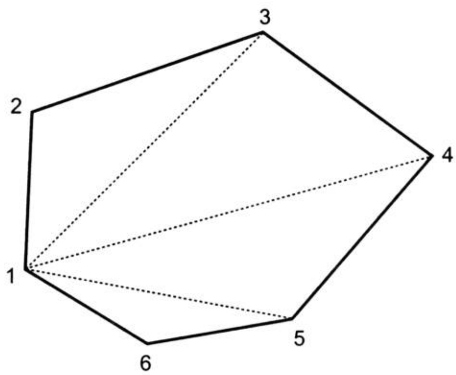
Además de las instrucciones que puntualmente lleva el programa y que lo hacen muy *amigable*, a continuación se incluyen algunos conceptos y temas fundamentales para la elaboración y aplicación del programa que ponemos a su consideración.

LOS AUTORES

Conceptos teóricos básicos

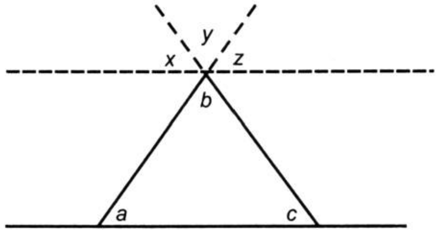
Compensación angular de una poligonal: sea la poligonal 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1 (figura 1). Si trazamos desde el vértice 1 todas las diagonales posibles, formamos cuatro triángulos.

FIGURA 1. *Poligonal 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1*



Si hacemos lo mismo en cada vértice de la misma poligonal y en general en cualquier poligonal, notaremos que siempre el número de triángulos que se forman es igual al número de lados del polígono, disminuido en dos unidades. Por tanto, si n es el número de lados, se formarán $n - 2$ triángulos. Como sabemos que los ángulos de un triángulo miden 180° (figura 2), la suma de los ángulos interiores de una poligonal será tantas veces 180° como número de triángulos se puedan formar.

FIGURA 2. *Geometría del triángulo*



(*b*)

$x + y + z = 180°$
$a = z$
$b = y$
$c = x$
$a + b + c = 180°$

Esta condición geométrica no puede cumplirse en la práctica de la topografía al cien por ciento, ya que las medidas angulares se ven afectadas por errores.

Así, la diferencia *(d)* entre la suma de ángulos interiores medidos y la condición geométrica nos dará la discrepancia o error angular, y la corrección se hará repartiendo por igual la discrepancia entre el número *(n)*, de vértices de la poligonal, pues se considera que todos los ángulos fueron medidos en condiciones semejantes. En ocasiones se toman otras convenciones particulares para hacer la corrección.

a) Ángulos interiores. La suma de los ángulos interiores de la poligonal debe ser 180° (n – 2).

b) Ángulos exteriores. La suma de los ángulos exteriores debe ser 180° (n + 2).

c) Ángulos de deflexión. Suma de deflexiones = 360°.

FIGURA 3

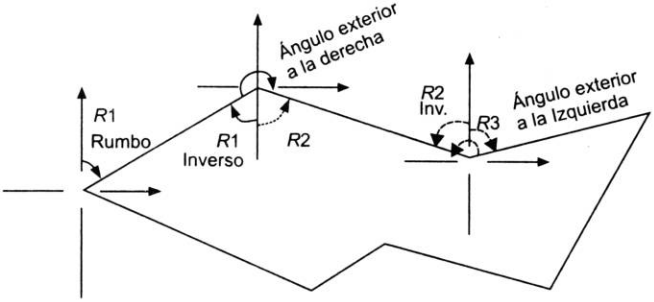
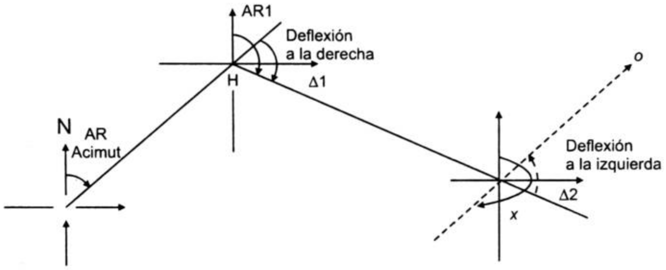


FIGURA 4



Cálculo de rumbos de los lados de una poligonal: Si se conoce un rumbo o un acimut inicial y los ángulos medidos (por deflexión, interiores o exteriores, a la izquierda o a la derecha). Dicho rumbo inicial puede ser magnético o astronómico.

Una vez hecha la compensación angular de la poligonal podemos determinar las direcciones de las líneas que la forman. Para proporcionar un método de cálculo veamos primero la solución gráficamente:

a) Cuando se conoce un rumbo inicial y ángulos de deflexión a la izquierda o a la derecha (figura 4).

b) Si se conocen los ángulos exteriores a la izquierda o a la derecha y un rumbo inicial (figura 3).

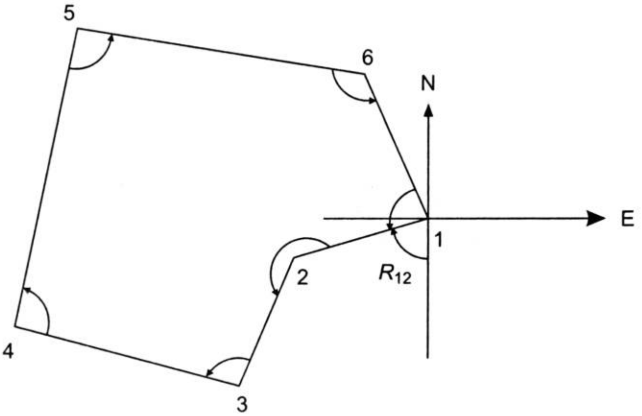
c) Para el caso de ángulos interiores medidos a la izquierda o a la derecha (figura 5).

De los incisos *a*, *b* y *c* se desprende que el cálculo del rumbo de uno o dos lados de una poligonal es sencillo por medio de gráficos. Sin embargo, cuando el número de lados es grande, crece el grado de complicación y esto puede propiciar fallas, ya que es un procedimiento inseguro, pues no es fácil hacer una comprobación, además que resulta demasiado lento. Ilustremos con un ejemplo completo, resuelto por medio de un procedimiento gráfico o de observación, y posteriormente, lo resolveremos siguiendo un arreglo convencional que resulta de estas observaciones.

Sea la poligonal 1, 2, 3, 4, 5, 6,1 (figura 5). Si sabemos que un rumbo inicial es de SO 72° 40' para el lado $\overline{12}$ y los ángulos interiores medidos en sentido hacia la izquierda son:

Vértice	*Ángulos izquierdos* ***compensados***
1	90° 07'
2	235° 23'
3	92° 11'
4	105° 09'
5	89° 15'
6	107° 55'
SUMA	720° 00'

FIGURA 5



Procedimiento: Se verifica que la poligonal cierre angularmente; de no ser así, se hace la corrección correspondiente.

Se hace un esquema representativo del lado del cual conocemos el rumbo o acimut y el ángulo medido (figura 6).

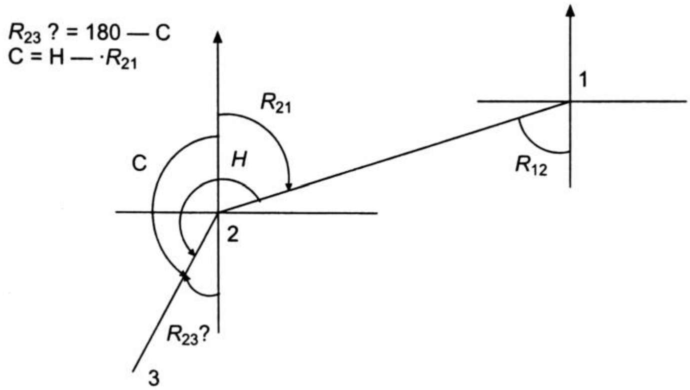
Se hacen las consideraciones del caso, se determina el rumbo siguiente y se continúa con el desarrollo de la figura.

Rumbo de la línea $\overline{12}$ SO 72° 40'. Según veremos gráficamente, es necesario considerar los rumbos inversos de los lados; en este primer caso será $\overline{21}$ = NE 72° 40' (figura 6).

Llamaremos *H* a los ángulos horizontales medidos y *R* a los rumbos de las líneas.

La dirección que conocemos es la del lado $\overline{12}$; como en el vértice 2 cambiamos la dirección de la recta en un ángulo de 235° 23', tenemos una nueva línea, la $\overline{23}$ (figura 6). Al ángulo horizontal *H* hay que restarle el

FIGURA 6

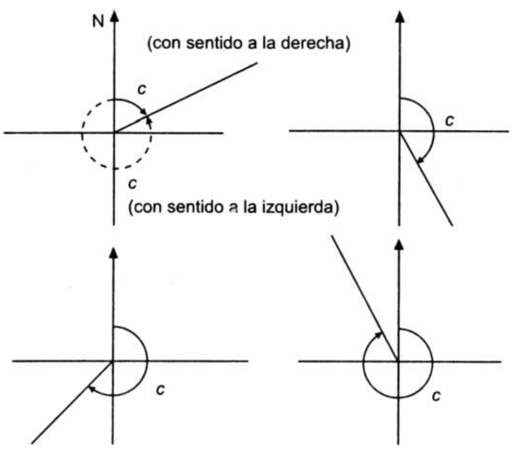


rumbo de la línea anterior para conocer el de la línea siguiente, o sea $H - R$ en este caso. Si al resultado de esta operación le llamamos C veremos que es un ángulo comprendido entre la meridiana y la línea considerada para el cálculo. El origen de C en este caso fue la parte norte del eje y su sentido a la izquierda.

$$\begin{aligned} H &= 235^\circ\ 23' \\ R &= \underline{\ \ 72^\circ\ 40'} \\ C &= 162^\circ\ 43' \end{aligned}$$

La cantidad C puede, por lo tanto, ser menor que 90°, mayor que 90°, menor que 180°, mayor que 180°, menor que 360°, y como sabemos que los rumbos son medidos de 0 a 90°, haremos en cada caso la consideración correspondiente; en cierto sentido C es una cantidad acimutal (figura 7).

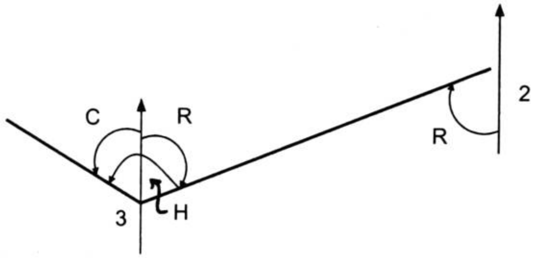
FIGURA 7



Si C = 162° 43', el rumbo de la línea será 180° – C = SO 17° 17′, que es el rumbo de la línea $\overline{23}$.

Consideremos ahora el rumbo inverso $\overline{32}$ = NE 17° 17', y el ángulo H en vértice 3 es de 92° 11' (figura 8).

FIGURA 8



De la figura 8 se desprende también que $C = H - R$; C = 74° 54' con origen en la parte norte del eje, que es contrario al origen del rumbo de la línea anterior, $\overline{23}$. Como C < 90°, vemos que el rumbo es directo para el lado $\overline{34}$, es NO 74° 54'. Pasemos al vértice 4, para lo cual necesitamos el rumbo $\overline{43}$, que es SE 74° 54' (figura 11).

FIGURA 9

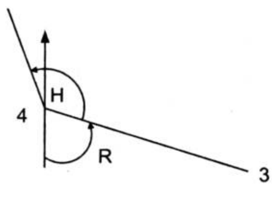
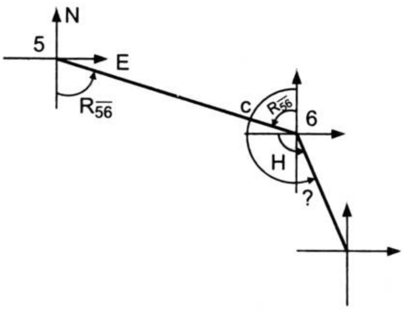


FIGURA 10

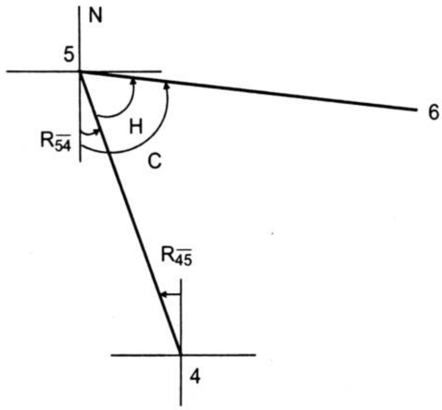


La figura 10 nos muestra que $C = H + R = 180° \ 03'$ y que su origen es la parte sur del eje Y.

Según se ve, el rumbo de la línea $\overline{45}$ es C – 180° = SE 0°03'.

Vemos ahora el rumbo del lado $\overline{56}$ a partir del rumbo del lado $\overline{45}$ y el ángulo medido en el vértice 5 (figura 11).

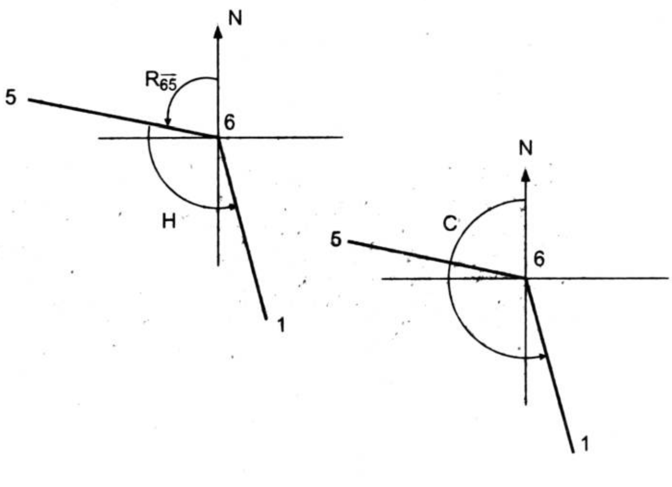
FIGURA 11



Según nos muestra la figura 11, tenemos que $C = H + R$, y resulta ser de 89° 18', o sea, menor que 90°, por lo tanto, es un rumbo directo con origen en el sur.

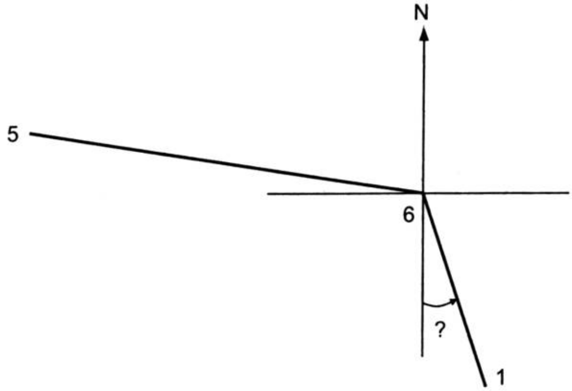
Si C = 89° 18', según vemos en el esquema, el rumbo de la línea $\overline{56}$ es SE 89° 18'.

FIGURA 12



Rumbo de la línea $\overline{61}$. Con el rumbo inverso de la línea anterior NO 89° 18' y el ángulo 6 = 107° 55' (figuras 12 y 13).

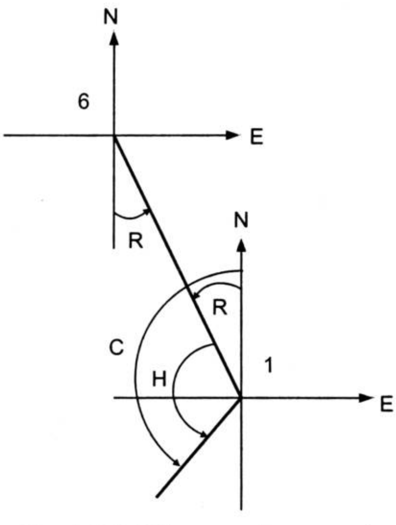
FIGURA 13



$C = H + \mathrm{R}$ = 197° 13', de manera que el rumbo del lado $\overline{61}$ queda = C – 180° = SE 17° 13'.

Finalmente, y para comprobar si nuestro desarrollo fue correcto, calculamos el rumbo de la línea $\overline{12}$, que fue el de partida, con el inverso de la línea anterior ($\overline{16}$ = NO 17° 13') y el ángulo medido en el vértice 1 = 90° 07' (figura 14).

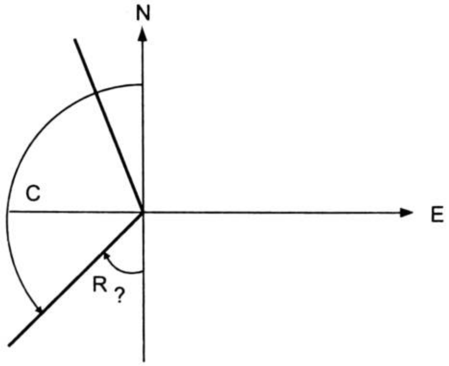
FIGURA 14



Se ve que $C = H + R$ = 107° 20' con origen en la parte norte.

Así, el rumbo de $\overline{12}$ es = 180° –C = SO 72° 40', con lo cual comprobamos el cálculo (figura 15).

FIGURA 15



El caso que hemos resuelto nos da una idea de lo que sucedería si la poligonal tuviese un número de lados mayor. Si se resolvieran *m* casos para poligonales de *n* lados con ángulos medidos a la izquierda o a la derecha notaríamos, como en el ejemplo anterior, que todo gira en torno a la expresión $H \pm R = C$, y el signo que le demos dependerá del sentido en el que se midieron los ángulos interiores.

El origen de *C* se observó siempre contrario al origen del rumbo de la línea anterior. El sentido de *C* es el mismo de los ángulos interiores, excepto cuando $R > H$ y $H - R = C$. Como no existen rumbos o acimutes que sean negativos (recuérdese la definición de ambos), esto nos indica que cambia el sentido del ángulo *C*. Una vez que se conoce éste se facilita la operación. Para evitar desarrollos largos que conducen a equivocaciones, se tomarán las siguientes convenciones.

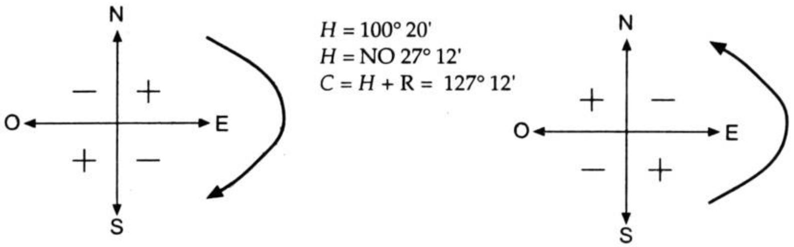
Para ángulos medidos en sentido a la derecha, el signo que se da al rumbo de la línea anterior *R*, será el de la figura 16a; para el cálculo de *C* para ángulos medidos en sentido hacia la izquierda se tomarán los signos contrarios (véase la figura 16b).

FIGURA 16

Ejemplos:

$H = 23° 56'$
$R =$ SE $2° 45'$
$C = H - R = 21° 11'$
$C < 90°$

$H = 100° 20'$
$H =$ NO $27° 12'$
$C = H + R = 127° 12'$



a) *b)*

Tomemos el ejercicio anterior, de cuyo origen y sentido ya se habló. Si queremos dar un sentido más formal a este método, seguiremos el desarrollo según el cuadro que damos a continuación:

Ángulos medidos							
A la derecha				*A la izquierda*			
R	C	Origen	Sentido	R	C	Origen	Sentido
NE	$H + R$	S		NE	$H - R$	S	
SO		N		SO		N	
NO	$H - R$	S		NO	$H + R$	S	
SE		N		SE		N	

Si resolvemos la misma poligonal del ejemplo anterior, siguiendo estas convenciones tendremos:

Obsérvese que se trata de ángulos medidos en sentido hacia la izquierda (véase figura 17).

Como se puede apreciar, el método es claro, breve y seguro. El croquis que se hace a la derecha del cálculo puede omitirse cuando se tiene práctica, pues el ángulo *C*, una vez conocido el origen, nos dice en qué cuadrante queda la línea que estamos buscando, y el valor angular del rumbo lo obtenemos directamente de las operaciones que efectuamos.

Considerando levantamientos realizados por poligonal con ángulos interiores en cualquier sentido y conociendo un acimut inicial, es posible determinar los acimutes de las demás líneas de manera sistemática, tanto manualmente como con ayuda de un programa de computadora, o también con hoja de cálculo o, como en este caso, un programa en Visual Basic 6.0; los considerandos anteriores y la secuela de cálculo, de manera combinada con el método de levantamiento por conservación de acimutes.

Si consideramos un polígono abierto A, B, C, D, y un acimut del lado AB, ya sea magnético o astronómico, llevaríamos una secuencia de cálculo manual como se muestra en la figura 18.

FIGURA 18

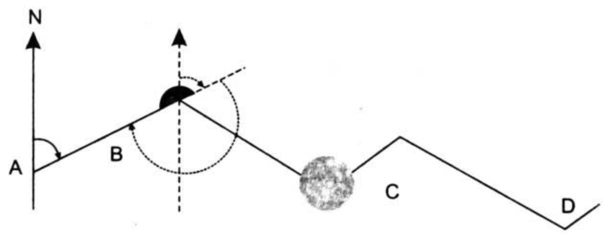
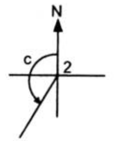
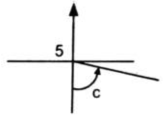
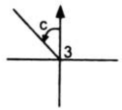
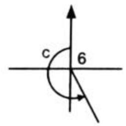
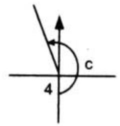
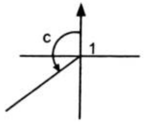


FIGURA 17

Lado	Rumbo	Croquis	Lado	Rumbo	Croquis
1 – 2	SO 72° 40'		5 – 6	SE 89° 18'	
∠2 = *H* =	235° 23'		∠6	107° 55'	
C =	162° 43'		C =	197° 13'	
	180°			– 180°	
2 – 3	SO 17° 17'		6 – 1	SE 17° 13'	
∠3	92° 11'		∠1	90° 07'	
C =	74° 54'		C =	107° 20'	
3 – 4 =	NO 74° 54'			180°	
∠4	105° 09'		1 – 2	SO 72° 40'	
	180° 03'			L.q.c.	
	– 180°				
4 – 5	NO 0° 03'				
∠5	89° 15'				
C =	89° 18'				

Es claro que el acimut AB y el BA difieren en 180°, de modo que si consideramos los ángulos horizontales ($\angle$A, $\angle$B, $\angle$C, $\angle$D), se tendría:

$$\left.\begin{array}{l}\text{acimut AB} = \text{acimut BA} + 180° + \angle B \\ \text{acimut BC} = \text{acimut CB} + 180° + \angle C \\ \text{acimut CD} = \text{acimut DC} + 180° + \angle D\end{array}\right\} 1$$

Pero:

$$\left.\begin{array}{l}\text{acimut AB} + 180° = \text{acimut inverso AB} \\ \text{acimut BC} + 180° = \text{acimut inverso BC} \\ \text{acimut CD} + 180° = \text{acimut inverso CD}\end{array}\right\} 2$$

Sustituyendo 2 en 1:

$$\left.\begin{array}{l}\text{acimut AB} = \text{acimut inverso BA} + \angle B \\ \text{acimut BC} = \text{acimut inverso CB} + \angle C \\ \text{acimut CD} = \text{acimut inverso DC} + \angle D\end{array}\right\} 3$$

De manera que, generalizando, se puede establecer la siguiente regla:

Un acimut inicial de un lado cualquiera en un polígono nos permite obtener el acimut del lado siguiente, simplemente sumando si los ángulos son derechos, o restando si son izquierdos, al acimut inverso del lado anterior el ángulo horizontal correspondiente al vértice de estación del lado que se busca:

$$\text{acimut BC} = \text{acimut inverso AB} + \angle B$$

Ejemplo numérico con la poligonal cerrada de 6 vértices que antes se resolvió por el método convencional $H \pm R = C$, siguiendo ahora la regla descrita:

Vértice	*Ángulos izquierdos* ***compensados***
1	90° 07'
2	235° 23'
3	92° 11'
4	105° 09'
5	89° 15'
6	107° 55'
SUMA	720° 00'

Dato de inicio que se proporcionó:

$$\text{Rumbo } \overline{12} = \text{SO } 72° \, 40';$$

de manera que:

$$\text{Acimut } \overline{12} = 252° \, 40;$$

secuencia:

Acimut 12 = 252° 40'
+ 180° 00'
Acimut inv. 12 = 432°40'
$-\angle 2$ $- \underline{235° \, 23'}$
Acimut 23 = 197° 17'
+ 180° 00'
Acimut inv. 23 = 377° 17'
$-\angle 3$ $- \underline{92° \, 11'}$
Acimut 34 = 285° 06'
+ 180° 00'
Acimut inv. 34 = 465° 06'
$-\angle 4$ $- \underline{105° \, 09'}$
Acimut 45 = 359° 57'
+ 180° 00'
Acimut inv. 45 = 179° 57'
$-\angle 5$ $- \underline{89° \, 15'}$
Acimut 56 = 90° 42'
$+ \underline{180° \, 00'}$
Acimut inv. 56 = 270° 42'
$-\angle 6$ $- \underline{107° \, 55'}$
Acimut 61 = 162° 47'
$+ \underline{180° \, 00'}$
Acimut inv. 61 = 342° 47'
$-\angle 1$ $- \underline{90° \, 07'}$
Acimut 12 = 252° 40'

Esto demuestra que los cálculos fueron correctos. Además, nótese que si se convierten los acimutes a rumbos, coinciden con los calculados por el otro método. No obstante, el hecho de contar con los acimutes nos permite calcular junto con las distancias de los lados del polígono, las proyecciones sobre los ejes cartesianos, y con la ventaja de que nos arroja el signo algebraico correspondiente, muy útil para la realización del programa.

Compensación lineal de una poligonal

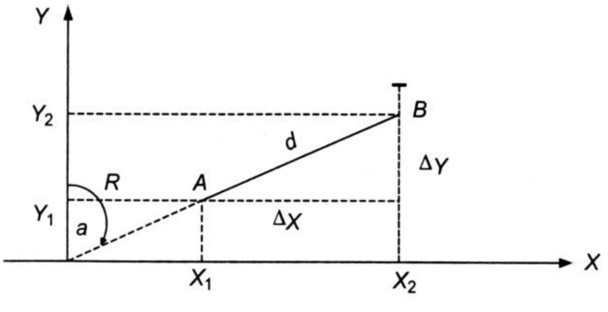
Para poder dibujar nuestra figura de apoyo o poligonal es necesario que cumpla las condiciones geométricas de cierre en ángulo y distancia.

Una vez compensados los errores que se introducen en la medición de los ángulos, procederemos a compensar los errores que ocurren en la medida de los lados. Si dibujamos la poligonal por medio de los ángulos compensados o de los rumbos calculados y las distancias medidas, encontramos que el punto final no coincide con el inicial, a causa del error lineal. Éste se corrige de dos maneras: el método gráfico (que no se describe aquí) y el método analítico.

Método analítico

Tomando un lado de la poligonal, el $\overline{AB}$, podemos dar coordenadas (X_1, Y_1) al vértice A. Como conocemos la distancia d y el rumbo R del lado, podemos encontrar las coordenadas (X_2, Y_2) del vértice B mediante la proyección de d sobre los ejes cartesianos. En la figura 19 se ve más claramente.

Figura 19



Directamente tenemos:

$$X_2 - X_1 = \Delta X$$
$$Y_2 - Y_1 = \Delta Y$$

Los incrementos que hay que dar a las coordenadas de A para encontrar las de B, son ΔX y ΔY, o sea, las proyecciones sobre los ejes cartesianos, de manera que:

$$\Delta X = d \text{ sen } R = d \text{ sen acimut}$$
$$\Delta Y = d \cos R = d \cos \text{acimut}$$

en donde d siempre será positiva y el signo de ΔX y ΔY dependerá del ángulo de dirección a (figura 19), que puede ser rumbo o acimut, como se ve en el cuadro siguiente:

Incremento	*Cuadrante*			
	NO	SE	NE	SO
ΔX	−	+	+	−
ΔY	+	−	+	−

Como puede verse en la figura 19, las coordenadas del punto B son:

$$B \begin{cases} X_2 = X_1 + \Delta X \\ \\ Y_2 = Y_1 + \Delta Y \end{cases}$$

Una vez calculados los incrementos de coordenadas mediante las proyecciones de los lados, podemos hacer extensivo nuestro razonamiento a lo largo de toda la poligonal y determinar las coordenadas de n vértices en una poligonal abierta o cerrada. Se puede decir que, para fijar las coordenadas de un punto, basta sumar algebraicamente las proyecciones del lado correspondiente a las coordenadas del punto anterior. El caso inverso sería que, conociendo las coordenadas de los puntos, quisiéramos conocer la distancia y el ángulo de dirección. Tendríamos que usar las fórmulas:

$$\tan a = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \qquad d = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2}$$

$$d = \frac{\Delta Y}{\cos a} = \frac{\Delta x}{\text{sen } a}$$

$$d = \Delta Y \text{ sen } a + \Delta X \cos a$$

Como en el ejemplo anterior, se trata de una poligonal cerrada, y la suma de las proyecciones de los lados debe ser igual a cero y teóricamente decimos que:

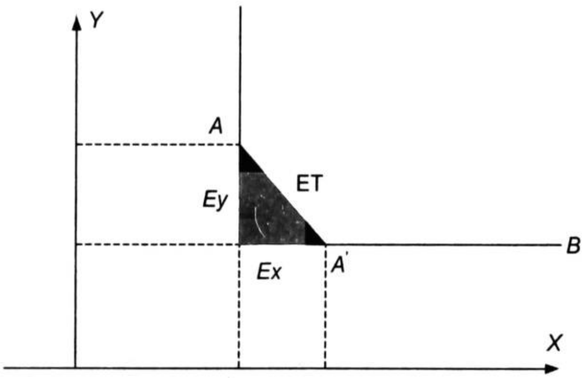
$$\sum_{i=1}^{n} \Delta X_i = 0 \quad \text{y que} \quad \sum_{i=1}^{n} \Delta Y_i = 0$$

No obstante, en la práctica esta suma nunca o casi nunca es igual a cero, por los errores lineales o de cierre *EX* y *EY*. En otras palabras, la suma algebraica de las proyecciones sobre el eje de las *Y* positivas o sobre la parte norte del eje y lado de las *Y* negativas o sobre la parte sur del eje son iguales al error en *Y* o *EY*

$$(\Sigma \text{ proy } N) + (\Sigma \text{ proy } S) = EY$$
$$(\Sigma \text{ proy } E) + (\Sigma \text{ proy } O) = EX$$

Estos errores parciales, *EY* y *EX*, nos dan el error total (figuras 20 y 23).

FIGURA 20



Según el teorema de Pitágoras:

$$ET = \sqrt{(EX)^2 + (EY)^2}$$

Para eliminar estos errores es necesario aplicar ciertas correcciones proporcionales a cada lado medido (método de la brújula) o a las proyecciones de los lados (método del tránsito, como se ilustra en la figura 23), cuyas fórmulas son las siguientes:

Método de la brújula:

$$CX = \frac{EX}{[L]}(Li)$$

$$CY = \frac{EY}{[L]}(Li)$$

Método del tránsito (que es el que resuelve este programa PG 1.0):

$$CY = \frac{EY}{[Y]}(Y); \quad \text{si} \quad \frac{EY}{[Y]} = K, \quad \text{entonces} \quad CY = KY$$

$$CX = \frac{EX}{[X]}(X) \quad \text{también} \quad CX = K'X$$

En las que:

CX = Corrección en X
CY = Corrección en Y
EX = Error en $X = \sum_{i=1}^{n} \Delta X_i$

EY = Error en $Y = \sum_{i=1}^{n} \Delta Y_i$

$[L]$ = Suma de longitudes de los lados o perímetro $= \sum_{i=1}^{n} L_i$

Li = Longitud de un lado "i"
$[Y]$ = Suma del valor absoluto de las proyecciones sobre el eje de las ordenadas $= \sum_{i=1}^{n} |\Delta Y_i|$
Y = Proyección de un lado sobre el eje de las ordenadas $= \Delta Y_i$
$[X]$ = Suma del valor absoluto de las proyecciones sobre el eje de las abscisas $= \sum_{i=1}^{n} |\Delta X_i|$
X = Proyección de un lado sobre el eje de las abscisas $= \Delta X_i$
K y K' = Constantes

Precisión:

En el caso de poligonales o cadenas cerradas, se llama precisión a la relación entre el error total y el perímetro medido $\frac{ET}{PERIM}$. Generalmente la precisión se expresa en forma de una relación con la unidad como numerador, por ejemplo:

$$\frac{1}{5000},\ \frac{1}{350},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{3000},\quad 1:250,\quad 1:10\,000,\quad \text{etc.}$$

Se acostumbra escribir como denominador cifras enteras y generalmente redondeadas; más claramente, si llamamos *P* a la precisión, que es igual a $\frac{1}{X}$ tendremos:

$$P = \frac{1}{X} = \frac{ET}{PERIM.};\ X = \frac{PERIM.}{ET}$$

y así:

$$P = \frac{1}{PERIM. \div ET}$$

Si *X* resulta un número, como por ejemplo 1 084.75, se puede tomar el valor de X = 1 100. Así, la precisión nos quedaría $P = \frac{1}{1100}$.

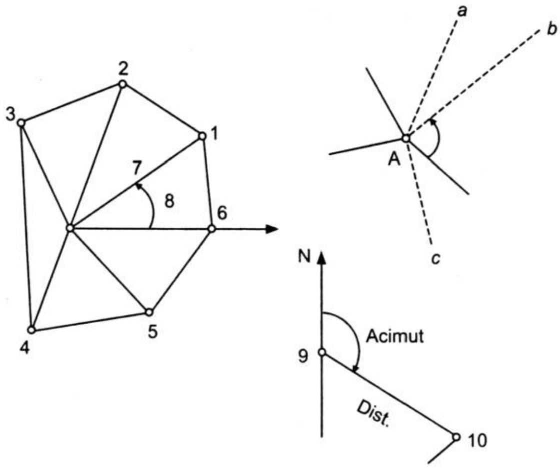
Con este dato podremos conocer la calidad de nuestro trabajo, comparándolo con la tolerancia fijada para cada caso.

Coordenadas en función de ángulos y distancias

a) Coordenadas polares. Son aquellas que se obtienen de levantamientos hechos por radiación, ya sea desde un punto central o desde un vértice de poligonal en donde se conoce un ángulo o una dirección y una distancia, o sea (r, θ) (figura 21).

b) En función de las proyecciones de los lados. Conociendo el rumbo o el acimut de los lados y sus distancias podemos tener las proyecciones sobre los ejes cartesianos. Con ellas (según se vio) es posible descubrir el error y compensarlo. Una vez compensadas las proyecciones de los lados es posible calcular las coordenadas, simplemente partiendo de un vértice de coordenadas conocidas o eligiendo coordenadas rectangulares apropiadas (0,0) (10, 20), etc. Se aconseja usar cifras grandes (10 000; 10 000) para tener todos los vértices en un cuadrante positivo y sumar algebraicamente las proyecciones correspondientes.

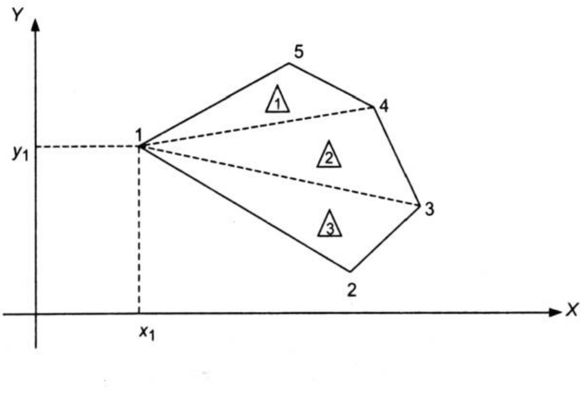
FIGURA 21



ÁREA DE UN POLÍGONO EN FUNCIÓN DE SUS COORDENADAS

Sea el polígono 1, 2, 3, 4, 5, 1 (figura 22), trazamos las diagonales $\overline{14}$ y $\overline{13}$ formando los triángulos 1, 2 y 3. Sabemos, por geometría analítica, que el área de un triángulo en función de las coordenadas de los vértices es igual a $\frac{1}{2}$ de un determinante, y si el área del polígono es igual a la suma de las áreas de los triángulos 1, 2 y 3, tendremos que:

FIGURA 22



$$a = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix} = \text{área del triángulo 3}$$

$$2A = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_5 & Y_5 & 1 \\ X_4 & Y_4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Y_1 & Y_1 & 1 \\ X_4 & X_4 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \end{vmatrix} = \text{Poligonal, triángulos } 1, 2 \text{ y } 3$$

desarrollando nos queda:

$$\begin{aligned} 2A = X_1\,Y_5 + X_5\,Y_4 + X_4\,Y_1 - X_5\,Y_1\,X_1 \; - Y_4 - X_4\,Y_5 + X_4\,Y_3 + X_3\,Y_1 - X_1\,Y_3 \\ - X_3\,Y_4 + X_3\,Y_2 + X_2\,Y_1 - X_4\,Y_1 + X_1\,Y_4 - X_3\,Y_1 + X_1\,Y_3 - X_1\,Y_2 - X_2\,Y_3 \end{aligned}$$

Simplificando y factorizando:

$$2A = X_1\,(Y_5 - Y_2) + X_2\,(Y_1 - Y_3) + X_3\,(Y_2 - Y_4) + X_4\,(Y_3 - Y_5) + X_5\,(Y_4 - Y_1)$$

Generalizando para una poligonal de *n* lados:

$$2A = X_1\,(Y_{\mathrm{n}} - Y_2) + X_2\,(Y_1 - Y_3) \ldots + X_{n\text{-}1}\,(Y_{n\text{-}2} - Y_n) + X_{n\text{-}2}\,(Y_{n\text{-}1} - Y_1)$$

Se puede decir que "dos veces el área" es igual a la suma de los productos de las abscisas por la diferencia entre la ordenada del vértice anterior y la del vértice siguiente, o la diferencia entre la ordenada de la izquierda y la de la derecha del vértice considerado.

También se deduce que:

$$2A = Y_1\,(X_2 - X_5) + Y_2\,(X_3 - X_1) + Y_3\,(X_4 - X_2) + Y_4(X_5 - X_3) + Y_5\,(X_1 - X_4)$$

Generalizando:

$$2A = Y_1\,(X_2 - X_n) + Y_2\,(X_3 - X_1) + \ldots + Y_{n\text{-}1}\,(X_n - X_{n2}) + Y_n\,(X_1 - X_{n\text{-}1})$$

Y se puede decir que el área es igual a $\frac{1}{2}$ de la suma de los productos de las ordenas por la diferencia entre la abscisa del vértice siguiente menos la del vértice anterior.

Dividiendo la figura en trapecios que se forman respecto a los ejes *X* y *Y* se llega a la misma expresión, como se verá inmediatamente después del siguiente ejemplo de cálculo:

FIGURA 23. *Ejemplo de planilla cálculo*

Est.	*P.O*	*Dist. Hor.*	*Rumbo*	*Coseno rumbo*	*Seno rumbo*	*Proyecciones* ΔY^1	*Sin corregir* ΔX^1
0	1	51.052	NE 69°52′13″	0.34415	0.93892	17.5694	47.9335
1	2	92.663	NE 27°47′36″	0.88464	0.46628	81.9730	43.2072
2	3	78.052	NW 56°18′02″	0.55484	0.83196	43.3062	−64.9360
3	4	97.036	NW 62°16′53″	0.46513	0.88524	45.1344	−85.9003
4	5	169.619	SW 61°11′30″	0.48188	0.87624	−81.7362	−148.6264
5	6	62.095	SE 32°35′06″	0.84259	0.53855	−52.3208	33.4413
6	7	70.162	SE 78°27′48″	0.19999	0.97980	−14.0320	68.7445
7	8	50.667	NE 78°10′46″	0.20485	0.97879	10.3789	49.5925
8	0	75.674	SE 48°22′04″	0.66435	0.74742	+ 50.2738	56.56055
SUMAS		747.020				198.3628	299.4627

Correcciones		*Proyecciones corregidas*		*Vértice*	*Coordenadas*	
CY	*CX*	ΔY	ΔX		*Y*	*X*
0.0001	0.0013	17.5695	47.9322	0	912.5669	1046.5913
0.0002	0.0012	84.9732	43.2060	1	930.1364	1094.5235
0.0001	0.0018	43.3063	−64.9378	2	1012.1096	1137.7295
0.0001	0.0024	45.1345	−85.9027	3	1055.4159	1072.7917
0.0002	0.0042	−81.7360	−148.6306	4	1100.5504	986.8890
0.0001	0.0010	−52.3207	33.4403	5	1018.8144	838.2584
0.0000	0.0019	−14.0320	68.7426	6	966.4837	871.6987
0.0000	0.0014	10.3789	49.5911	7	952.4617	940.4413
0.0001	0.0016	+50.2737	56.5589	8	962.8406	990.0324
				0	912.5669	1046.5913
0.0009	0.0168	198.3624	299.4711			

$EY =$ (Suma proy. N) – (Suma Proy. S) correcciones por
$EX =$ (Suma proy. E) – (Suma proy. O) regla del tránsito.

$$CY = KY; \; K = \frac{EY}{[Y]} \qquad ET = \sqrt{(EY)^2 + (EX)^2}$$

$$CX = K'X; K' = \frac{EX}{[X]} \qquad P = \frac{1}{\text{Perímetro} \div ET} \cdots \#$$

$EY =$ Error en el eje y
$EX =$ Error en el eje x
$CY =$ Constante de corrección en el eje Y
$P =$ Precisión de la poligonal
$CX =$ Constante de corrección en el eje X
$ET =$ Error lineal (error total)

$$K = \frac{EY}{[Y]} = \frac{\text{Error en eje } Y}{\text{Suma aritmética } N - S \text{ en valor absoluto}}$$

$K'' = EX$ Error en eje X

$$K' = \frac{EX}{[X]}$$

[X] Suma aritmética (E – 0) en valor absoluto

La deducción de la fórmula del área mediante los trapecios que se forman con la poligonal y alguno de los ejes cartesianos, según se ve en la figura 25, el cuadrilátero 1, 2, 3, 4, cuyas coordenadas (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), (X_4, Y_4) respectivamente, nos definen cuatro trapecios: *a12b, b23d, a14c, c43d* y su suma algebraica nos da el área de la figura:

$$A = A_{12ba} + A_{23db} - A_{3dc4} - A_{4ca1}$$

Considerando la fórmula para el área del trapecio

$$A = \left(\frac{B-b}{2}\right)h$$

en la que:

$B =$ base mayor o lado mayor
$b =$ base menor o lado menor
$h =$ altura del trapecio

Para nuestro análisis, los elementos de la fórmula anterior serán definidos por diferencias de abscisas y diferencias de ordenadas, de manera que:

$$A=\frac{X_1+X_2}{2}(Y_2-Y_1)+\frac{X_2+X_3}{2}(Y_3-Y_2)-\frac{X_3+X_4}{2}(Y_3-Y_4)-\frac{X_4+X_1}{2}(Y_4-Y_1)$$

Fórmula

$$2A = X_1(Y_n - Y_2) + X_2(Y_1 - Y_3) + X_3(Y_2 - Y_4) + \dots + X_{n-1}(Y_{n-2} - Y_n) + X_n(Y_{n-1} - Y_1)$$

O bien:

$$2A = (X_1 + X_2)(Y_2 - Y_1) + (X_2 + X_3)(Y_3 - Y_2) - (X_3 + X_4)(Y_3 - Y_4) - (X_4 + X_1)(Y_4 - Y_1)$$

Desarrollando y factorizando:

$$2A = X_1(Y_2 - Y_4) + X_2(Y_3 - Y_1) + X_3(Y_4 - Y_2) + X_4(Y_1 - Y_3)$$

Generalizando para una poligonal de n lados y simplificando:

$$2A=\sum_{i=1}^{n} X_i(Y_{i+1}-Y_{i-1})$$

en la que i es una sucesión de valores de 1 a n.

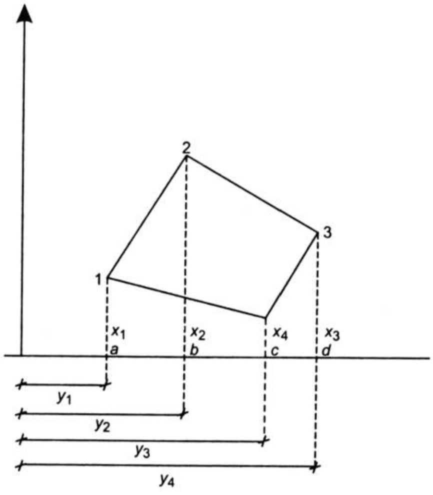
La expresión obtenida cambia en el caso en que la proyección sea sobre el eje de las X a:

$$2A = Y_1(X_4 - X_2) + Y_2(X_1 - X_3) + Y_3(X_2 - X_4) + Y_4(X_3 - X_1)$$

$$2A=\sum_{i=1}^{n} Y_i(X_{i-1}-X_{i+1})$$

Esta fórmula nos puede servir como comprobación del valor obtenido para el área y puede aplicarse el método mnemotécnico descrito para la deducción por medio de determinantes. En él usamos los ejes cartesianos girados 90° respecto al usado en esta deducción. Pero la finalidad en ambos casos fue encontrar la fórmula para el cálculo del área y poder usar la adecuada en cualquier caso en que tengamos la posición de los ejes cartesianos.

FIGURA 25



Guía del usuario

- Para instalar el software en su computadora inserte el CD ROM en la unidad correspondiente.
- Ejecute el archivo **SETUP.EXE**, y siga las instrucciones en pantalla.
- El programa aparecerá en el menú ***Inicio*** del escritorio de **Windows**, dentro de la carpeta **PG 1.0**.
- El archivo ejecutable a su vez se denomina **PG 1.0**.

Requisitos mínimos del sistema

- Una Computadora personal (PC) con procesador 486, Pentium I o superior
- Memoria RAM 16 MB
- Sistema operativo Windows 95 o superior
- Unidad de CD ROM
- Espacio libre en DD 20 MB

A continuación se muestra *paso a paso* el uso del programa **PG 1.0** para calcular y ajustar una poligonal por medio de la "Regla de tránsito", con un ejemplo de aplicación.

Como se menciona en el soporte teórico, los datos de entrada son los que se han recopilado mediante el levantamiento de campo, es decir, ángulos medidos, sin compensar, un rumbo o un acimut inicial y las distancias de los lados de la poligonal.

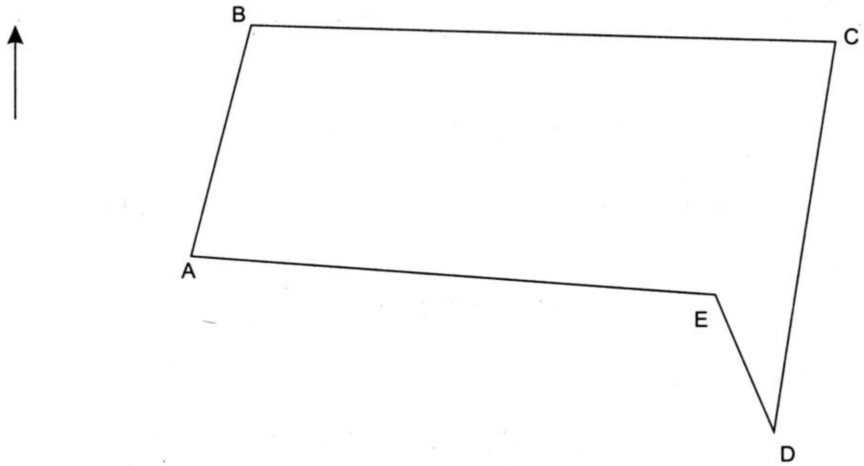
EJEMPLO DE APLICACIÓN

Datos:

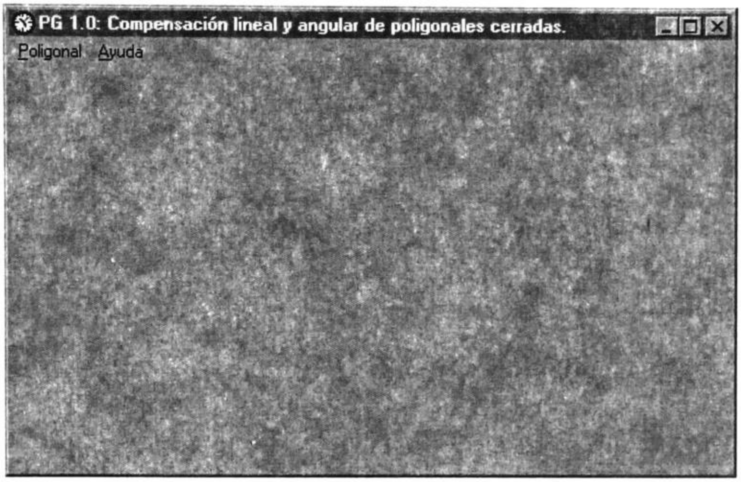
Vértice	*Ángulo izquierdo*	*Distancia (m)*
A	100° 44' 15"	285.1000
B	101° 35' 15"	610.450
C	89° 05' 15"	720.480
D	17° 12' 15"	203.000
E	231° 24' 15"	647.700

Rumbo inicial: AB NE 26° 10' 00"
Coordenadas iniciales: Punto A (700.000, 700.000).

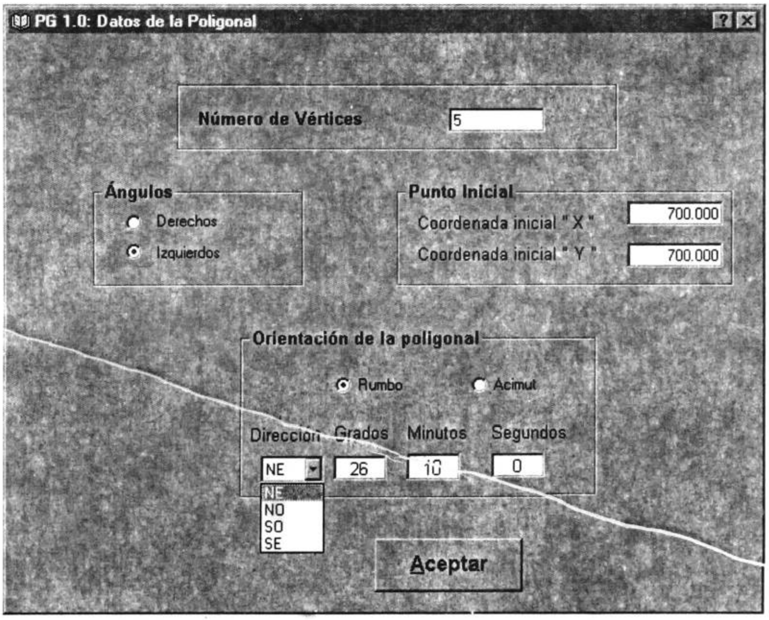
La poligonal levantada se muestra en el siguiente croquis:



Ejecute el archivo **PG 1.0**, y aparecerá la ventana que se muestra a continuación:



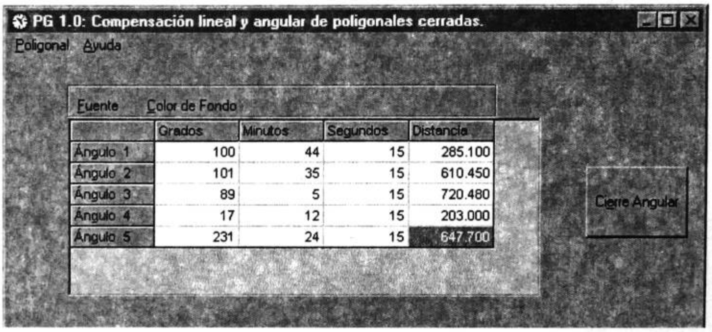
Seleccione la opción **Datos** del menú **Poligonal** y luego de escribir un título (opcional), ingrese los datos de entrada en los espacios que muestra la siguiente ventana:



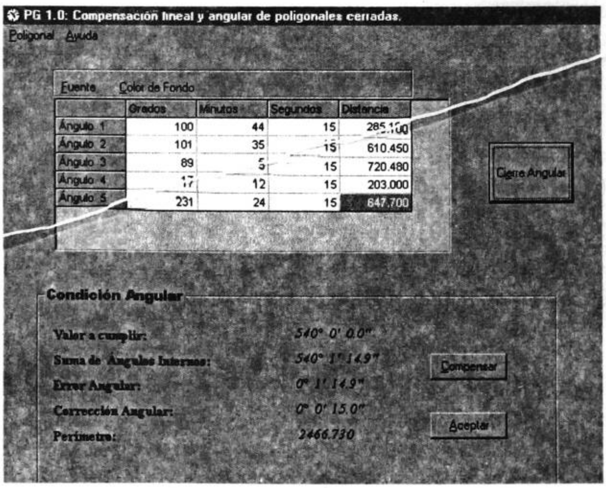
Se introducen los datos correspondientes a: **Número de vértices**, sentido de considerado de los **Ángulos** horizontales, coordenadas de origen del **Punto inicial** y la **Orientación de la poligonal**

Si se decidiera orientar la poligonal mediante un acimut inicial, no se requiere proporcionar dirección alguna, por ello, después de seleccionar la opción **Acimut** el espacio correspondiente a **Dirección** aparecerá en blanco. El espacio **Dirección** mostrará **NE, NO, SE, SO** para la opción **Rumbo** como se ve en la ventana anterior; luego, en ambos casos se deberán introducir los valores correspondientes a **Grados Minutos** y **Segundos** del acimut o rumbo inicial de la poligonal.

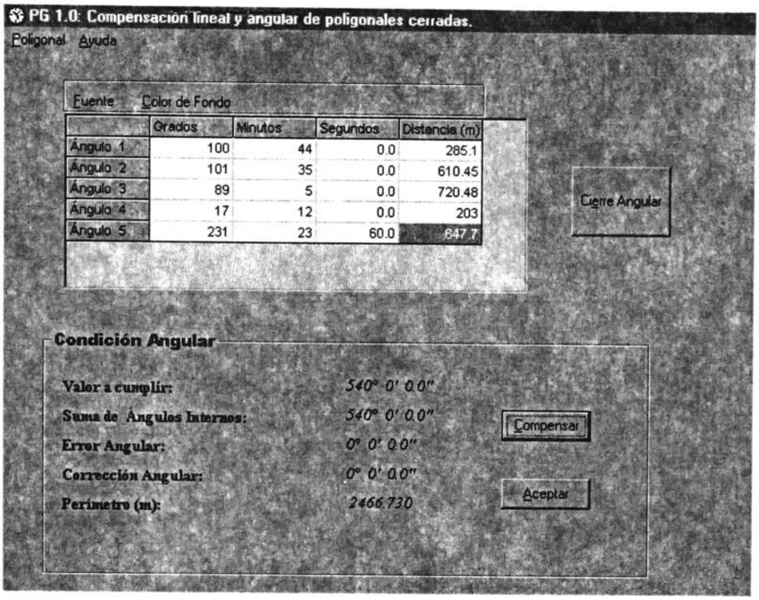
A continuación, al hacer click en el botón **Aceptar**, aparecerá una tabla en la cual se deben introducir en orden progresivo los valores de los ángulos medidos en campo, anotando los valores correspondientes en los espacios **Grados, Minutos** y **Segundos** en cada una de las celdas y, finalmente, anote, en orden progresivo, en la columna **Distancias** las medidas de los lados tomadas en el campo:



Al terminar, haga click en el botón **Cierre angular** y **PG 1.0** calculará la suma de los ángulos internos, aplicará la condición de cierre angular, le informará del error angular y hará la compensación requerida si dicho error satisface sus expectativas; aparecerá un cuadro como el de la ventana siguiente:

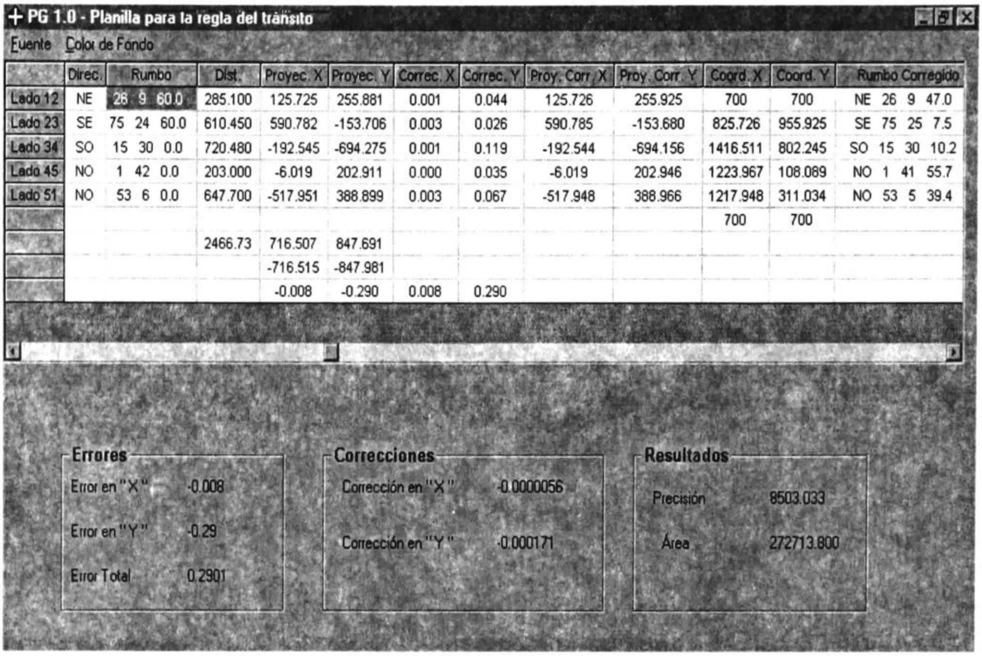


A continuación, si el error angular resultó ser menor o igual que la tolerancia que usted esperaba, presione el botón **Compensar** y **PG 1.0** compensará los ángulos internos y desplegará los valores como se ve en la siguiente ventana:



Después de compensar angularmente la poligonal, presione el botón **Aceptar** para que **PG 1.0** realice la **compensación lineal** de la poligonal, para la cual **PG 1.0** utiliza, como se mencionó al inicio de esta guía, la "Regla de tránsito", después de lo cual, **PG 1.0** muestra la planilla de cálculo completa, como puede verse en la ventana de la página siguiente, que se tituló "Tabla final de resultados"; en ella se muestra que **PG 1.0** permite determinar los errores "EX" y "EY", el *Error Total* "ET" y la Precisión del Levantamiento. Asimismo, la tabla muestra que, una vez realizado el ajuste de la poligonal, **PG 1.0** proporciona además el área del polígono, las distancias de los lados corregidas y los rumbos del polígono corregidos.

Tabla final de resultados:



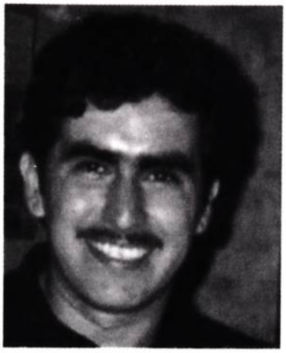
	Direc.	Rumbo	Dist.	Proyec. X	Proyec. Y	Correc. X	Correc. Y	Proy. Corr. X	Proy. Corr. Y	Coord. X	Coord. Y	Rumbo Corregido
Lado 12	NE	26 9 60.0	285.100	125.725	255.881	0.001	0.044	125.726	255.925	700	700	NE 26 9 47.0
Lado 23	SE	75 24 60.0	610.450	590.782	-153.706	0.003	0.026	590.785	-153.680	825.726	955.925	SE 75 25 7.5
Lado 34	SO	15 30 0.0	720.480	-192.545	-694.275	0.001	0.119	-192.544	-694.156	1416.511	802.245	SO 15 30 10.2
Lado 45	NO	1 42 0.0	203.000	-6.019	202.911	0.000	0.035	-6.019	202.946	1223.967	108.089	NO 1 41 55.7
Lado 51	NO	53 6 0.0	647.700	-517.951	388.899	0.003	0.067	-517.948	388.966	1217.948	311.034	NO 53 5 39.4
										700	700	
			2466.73	716.507	847.691							
				-716.515	-847.981							
				-0.008	-0.290	0.008	0.290					

Una vez terminada la ejecución del programa, usted puede guardarlo como archivo de texto y abrirlo después como un documento de *Word*, *Excel* o en el editor de textos que prefiera.

BIBLIOGRAFÍA

Alcántara, D., *Topografía*, México, UAM/FICA/UAEM, 2001.
García, F., *Curso básico de topografía*, México, Árbol, 1996.

Índice



JESÚS CANO LICONA obtuvo el título de ingeniero civil en 1999 en la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco. Cursó la maestría en estructuras en la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Ha colaborado en los cursos de Topografía y en el área de Estructuras de la UAM-Azcapotzalco. Ha realizado algunos programas de aplicación en Visual Basic.

Otros títulos en esta colección

Sergio A. Martínez Delgadillo, *Parámetros de diseño de sistemas de tratamiento de aguas residuales*
Lidia Girola (coord.), *Una introducción al pensamiento de Anthony Giddens*
Berenice Guadalupe Quintana Díaz, Margarita Beltrán Villavicencio y Jorge Francisco Rodríguez González, *Problemario de introducción a la ingeniería química*
Raúl Morales Castañeda, *Las relaciones económicas con el exterior, la balanza de pagos y el mercado de divisas*

El programa PG 1.0 complementa los cursos de Topografía que se imparten en cualquier institución educativa. Es muy útil para realizar trabajos profesionales de planimetría, ya que permite al usuario resolver los cálculos correspondientes a cualquier poligonal topográfica (levantada con cualquier tipo de instrumentos de medición angular y de distancias y de cualquier tamaño) de manera sencilla y rápida, pues se trata de un software muy amigable.

Este programa lleva de la mano al usuario, puesto que sigue el camino lógico y usual en este tipo de cálculos; ajusta los ángulos de manera tradicional y aplica la "regla del tránsito" para la compensación lineal, así que proporciona los siguientes resultados: *a)* conocimiento del error angular y su ajuste, *b)* conocimiento del error total y sus componentes en los ejes cartesianos, *c)* conocimiento de la precisión del levantamiento, *d)* correcciones por regla del tránsito, *e)* coordenadas con base en las que se le proporcionen al punto de inicio, *f)* determinación del perímetro y del área del polígono, *g) cálculo de los lados y los rumbos después de la corrección, h)* por último, permite que se almacene como un archivo de textos, lo cual hace posible abrirlo como archivo de texto o en hoja de cálculo.

ISBN 970654968-4

Libros de texto y manuales de práctica

9 789706 549686